

## Matematika javítóvizsga – 2018. augusztus

- szóbeli
  - 3 rövidebb (feladat, definíció, tétel) és 3 hosszabb feladat megoldása a 30 perces felkészülési idő alatt
  - a megoldás ismertetése 10-15 perces feleletben
- szükséges felszerelés: toll, ceruza, színes ceruza, radír, vonalzó, körző, számológép

Budapest, 2018. június 15.

Balázsa Ágnes  
szaktanár

### Felkészülés

- Füzet
- Tkv-9. Mozaik Kiadó: Sokszínű Matematika 9.
- Tkv-10. Mozaik Kiadó: Sokszínű Matematika 10.
- S Nemzeti Tankönyvkiadó: Matematika feladatgyűjtemény I. („Sárga csíkos”)
- K Nemzeti Tankönyvkiadó: Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. („Kék geometria”)
- o órán kiosztott feladatsor oldalszáma ebben a fájlban (nyomtatásra nem kerül)  
<http://www.ganziskola.hu/?q=balazsa>

### GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

#### Halmazok, műveletek, elemszám, logikai szita, intervallumok

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| <i>Elmélet</i>                                    | Feladat (emelt szintű feladatok nem) |
| ➤ Tkv-9. 21-24. definíciók                        | ➤ Tkv-9. 25.                         |
| ➤ Tkv-9. 26-29. halmazműveletek, definíciók       | ➤ Tkv-9. 30-31./ 1-12.               |
| ➤ Tkv-9. 32-34. halmazok elemszáma, logikai szita | ➤ Tkv-9. 34-35./1-6., 11.            |
|   | ➤ o 5. oldal                         |

#### Logikai műveletek, bizonyítási módszerek

- Tkv-10. 10-18. oldal órán tárgyalt része
- Tkv-10. 19-20./1-8.

#### Gráfok: elnevezések, ábrázolás

- Tkv-9. 38-40. oldal órán tárgyalt része
- Tkv-9. 41./1-6.
- o 6-7. oldal

**ALGEBRA****Ismétlés: összevonás, hatványozás, szorzás**

- *Tkv-9. 44-46. algebrai kifejezésekkel kapcsolatos fogalmak* ➤ Tkv-9. 47.
- *Tkv-9. 48-51. hatványozás definíciója, azonosságai* ➤ Tkv-9. 51.  
S 104-105./54-59., 107-108./73-79.
- *Tkv-9. 58-59. kifejezések szorzása* ➤ Tkv-9. 59.  
S 100-102./34-46.

**Hatványozás egész kitevőre, azonosságok**

- *Tkv-9. 52-53. hatványozás definíciója, azonosságai* ➤ Tkv-9. 54.  
S 125-127./164-166., 167./a, b1,b2,  
168./a-c, d1,d2, 170./a-q

**Számok normálalakja, műveletek**

- *Tkv-9. 55-57.* ➤ Tkv-9. 57.
- S 127-128./172-175.

**Nevezetes szorzatok, szorzattá alakítás, teljes négyzetté alakítás**

- *Tkv-9. 60., 62.  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $(a - b)(a + b)$*  ➤ Tkv-9. 64-65./1., 4., 5./b,e, 6-8.  
S 103./48-49., 105./60-65.
- *Tkv-9. 66-67. szorzattá alakítás teljes négyzetté alakítás (Tkv-9. 103. 3. példa)* ➤ Tkv-9. 67.  
➤ S 106./66.,67.

**Algebrai törtek értelmezési tartománya, műveletek**

egyszerűsítés, szorzás, osztás, összeadás, kivonás

- *Tkv-9. 68-72.* ➤ Tkv-9. 73.  
S 115-124./138., 139., 142., 143./a-h,  
147., 148., 152./a-p, (154-157.)

**Ismétlés: egyenletek megoldása mérlegelvvel, szorzattá alakítással**

- *Tkv-9. 173-176. mérlegelvvel* ➤ Tkv-9. 176.
- *Tkv-9. 169-171. szorzattá alakítással* ➤ Tkv-9. 172.

**Ismétlés: egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel, grafikus módszerrel**

- *Tkv-9. 177-179.* ➤ Tkv-9. 181.

**Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek**

- *Tkv-9. 182-187.* ➤ Tkv-9. 187./1-3., 5./a  
S 177./189-214., 220., 221., 405-421.,  
429., 430.

**Elsőfokú egyenletek: szöveges feladatok**

- *Tkv-9. 191-195.* ➤ Tkv-9. 194., 198./1-2.  
S 165-168./90-108., 110-121.,  
S 170-171./143-148.



**FÜGGVÉNYEK****Lineáris-, abszolútérték-, másodfokú-, négyzetgyök- és lineáris törtfüggvény**

(értelmezési tartomány, értékészlet, zérushely, monotonitás, minimum, maximum, paritás)

- *Tkv-9. 88-90. koordináta rendszer (ismétlés)*
- *Tkv-9. 124-126. függvénytranszformációk (összefoglalás)*
- *Tkv-9. 92-95. lineáris függvény*
- *Tkv-9. 96-98. abszolútérték függvény*
- *Tkv-9. 102-103. másodfokú függvény*
- *Tkv-9. 106-108. négyzetgyök függvény*
- *Tkv-9. 110-114. lineáris törtfüggvény*
- *Tkv-9. 91.*
- *Tkv-9. 95./1-2.*
- *Tkv-9. 101./1.*
- *Tkv-9. 105./1-2.*
- *Tkv-9. 109./1.*
- *Tkv-9. 115./1.*
- *o 8. oldal*

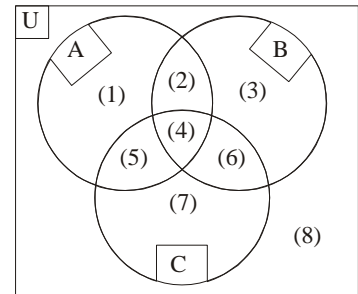
**GEOMETRIA****Egybevágósági transzformációk**

- *Tkv-9. 216-217.*
- *Tkv-9. 218-219. tengelyes tükrözés*
- *Tkv-9. 221-224. tengelyes szimmetria*
- *Tkv-9. 225-226. középpontos tükrözés*
- *Tkv-9. 228-230. középpontos szimmetria*
- *Tkv-9. 236-238. pont körüli elforgatás*
- *Tkv-9. 244-245. forgásszimmetria*
- *Tkv-9. 220./1-7.*
- *K 28-29./302-304., 306., 311., 315.*
- *Tkv-9. 224./1-6.*
- *Tkv-9. 227./1-8.*
- *K 32./360-364.*
- *Tkv-9. 230./1-4.,6.*
- *Tkv-9. 238.*
- *K 35-36./403., 405-408., 413., 419-421.*
- *Tkv-9. 245.*

**Feladatok** Halmazok

- $U = \{1; 2; 3; \dots; 19; 20\}$ ,  $A = \{20\text{-nál kisebb páratlan számok}\}$ ,  
 $B = \{x \mid 0 < x < 20 \text{ és } 3 \mid x\}$ . Ábrázold a halmazokat halmazábrán!  
 a) Határozd meg a B halmaz összes részhalmazát (az elemei felsorolásával)!  
 b) Hány részhalmaza van A-nak? (Elég kiszámolni, nem kell felsorolni)  
 c) Az elemei felsorolásával add meg az  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  és  $B \setminus A$  halmazokat!

- Adott az U alaphalmaz és benne az A, B és C halmazok. Venn-diagramjukon (1), (2), ..., (8)-cal jelöltük az egyes tartományokat. Határozzuk meg, hogy melyik tartományokból állnak az alábbi halmazok (a sorszámok felsorolásával)!



- |                                   |                                 |                               |
|-----------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| a) $(A \cap B) \cup C$            | b) $B \cap (C \setminus A)$     | c) $(B \cap C) \setminus A$   |
| d) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$   | e) $\overline{A \cap B}$        | f) $\overline{C \setminus A}$ |
| g) $\overline{(A \cup B) \cap C}$ | h) $\overline{A \cup B \cup C}$ |                               |

- Legyen az alaphalmaz  $U = \{\text{az informatika szó betűi}\}$  és két halmaz  $A = \{\text{az orom szó betűi}\}$ ,  $B = \{\text{a karika szó betűi}\}$ . Ábrázold a halmazokat Venn-diagrammal! Add meg a következő halmazokat az elemeik felsorolásával!

- |                          |                    |                          |
|--------------------------|--------------------|--------------------------|
| a) $\overline{A \cap B}$ | b) $A \setminus B$ | c) $\overline{A \cup B}$ |
|--------------------------|--------------------|--------------------------|

- Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha tudjuk, hogy

- |                                      |                                  |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| $A \setminus B = \{1; 5; 7\}$        | $C \cap \overline{D} = \{é; t\}$ |
| a) $A \cap B = \{4; 6\}$             | b) $C \cap D = \{r\}$            |
| $A \cup B = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ | $D \setminus C = \{k; á\}$       |

- Egy osztályban minden diák sportol valamit: tizennégyen kosárlabdáznak, tizenegyen fociznak, kilencen úsznak, heten kosaraznak és úsznak, hatan kosaraznak és fociznak, öten úsznak és fociznak, négyen mindhárom sportot úzik. Hányan járnak az osztályba?

- Írjuk fel a következő intervallumokat relációs jelekkel és ábrázoljuk számegegyenesen!

- |               |                     |  |                    |
|---------------|---------------------|--|--------------------|
| a) $]4; 5[$   | b) $[0,5; 4[$       | c) $\left] -\infty; \frac{3}{4} \right]$ | d) $]1; +\infty[$  |
| e) $[40; 70]$ | f) $[1,5; +\infty[$ | g) $]2; 10]$                             | h) $] -\infty; 6[$ |

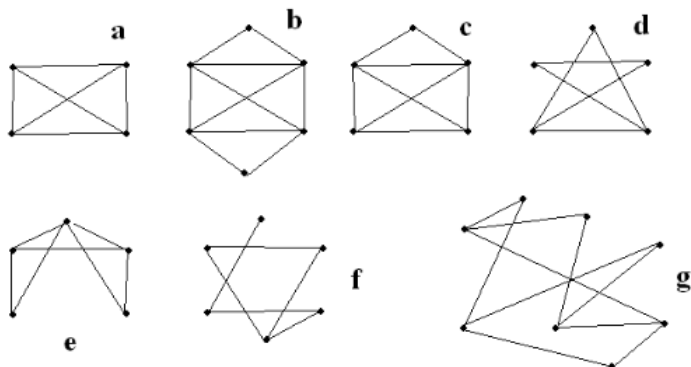
- Adjuk meg a halmazműveletek eredményét és ábrázoljuk számegegyenesen!

- |                           |                              |
|---------------------------|------------------------------|
| a) $] -5; 1[ \cap [1; 6[$ | b) $] -4; -2] \cap [ -2; 0]$ |
| c) $[0; 7[ \cap [ -5; 3]$ | d) $] -10; 3] \cup ]1; 5[$   |
| e) $[2; 4[ \cup [0; 8[$   | f) $] -4; 6[ \cap ]1; 2[$    |
| g) $]2; 6[ \cap [7; 10]$  | h) $[ -4; 2] \cup ] -3; 6[$  |

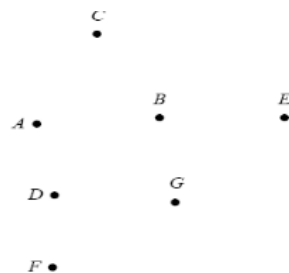
## Gyakorló feladatok gráfokra

- 1) Egy hattagú társaságban megkérdezzük embereket, hogy kinek hány ismerőse van a társaság tagjai között. Válaszul háromszor 1-et, kétszer 2-t és egyszer 5-öt kaptunk (az ismeretségek mindig kölcsönösek). Szemléltessük a társaságon belüli ismeretségi viszonyokat gráffal!
- 2) Egy kistérség 5 faluja között létrehozható-e olyan úthálózat, amely 4 utat tartalmaz, továbbá bármely faluból bármely másik faluba el lehet jutni? Ha a válasz igen, akkor adj meg ábrák segítségével 3 különböző változatot! (A falvakat számozással különböztess meg!)
- 3) Egy 5 fős társaságban 8 kézfogás történt. Adj meg egy olyan gráfot, amely ezt szemlélteti! (A gráf csúcsai legyenek a társaság tagjai, élei pedig a kézfogásoknak feleljenek meg.)
- 4) Józsefnek 3 gyermeke volt: Andor, Mátyás és Dávid. Mátyásnak 3 fia született, Dávidnak 1, Andornak egy sem. Szemléltesse gráffal az apa-fiú kapcsolatokat! Hány csúcsa és hány éle van ennek a gráfnak?
- 5) Ábrázoljuk gráfokkal az alábbiakat!
  - a) Egy Bergengóc falucskában a Főtérről a Tóhoz, a Parkba és a Kílátóhoz vezet út. Ezen kívül még a Tó és a Park között tapostak ki járást a helyiek.
  - b) Egy tengerészeti hadgyakorlaton négy hajó (H1, H2, H3, H4) vett részt és rendre piros, zöld, kék és sárga festékpatronnal lőtték egymást. A gyakorlat végén H1 oldalán zöld és kék, H2 oldalán kék, H4 oldalán piros foltok díszeltek, azonban H3 tiszta volt.
  - c) Négy ember találkozásán a következő kézfogások történtek. Egyszer mindenkivel lekezelt, két másik illető pedig egymással.

- 7) Az alábbi gráfok közül melyek rajzolhatók meg a ceruzánk felemelése nélkül úgy, hogy minden élt csak egyszer érintünk? Ha igen számozd meg a csúcsokat, és adj meg egy lehetséges körbejárást! Amelyiknél nem lehetséges, ott add meg a csúcsok fokszámát!



- 8) Rajzolj olyan ötpontú gráfot, melyben minden pont fokszáma különböző!
- 9) Egy hattagú társaságban mindenki a társaságnak pontosan három tagjával fogott kezét. Hány kézfogásra került sor? Ábrázold gráffal!
- 11) Egy öttagú társaságban a házigazda mindenkit ismer, minden egyes vendége pedig pontosan két embert ismer. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Szemléltesse rajzzal az ismeretségeket!
- 12) Egy hattagú társaságban mindenki a társaságnak pontosan három tagjával fogott kezét. Hány kézfogásra került sor?
- 15) Szemléltesse gráffal azt a vasúthálózatot, amelyben szereplő hét településről a következőket tudjuk:  
Az A várost B, C és D városokkal vasútvonal köti össze, a B városból C és E városokba, valamint a D városból az F és a G településekhez közvetlen vasútvonal megy. Mennyi a fokszámok összege ebben a gráfban?



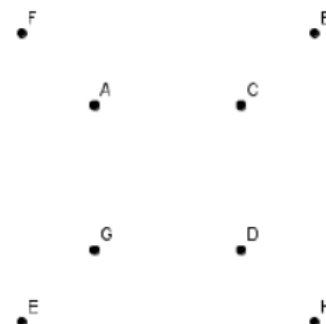
## Gyakorlás

- 16) Egy álláshirdetésre négyen jelentkeznek: Aladár, Béla, Cecil és Dénes. Az adott időben megjelennek a vállalatnál, s akkor kiderül, hogy közülük hárman, Aladár, Béla és Cecil osztálytársak voltak. Dénes csak Aladárt ismeri, ők régebben egy kosárlabdacsapatban játszottak. Szemléltesse az ismeretségeket gráffal! (Az ismeretségek kölcsönösek.)
- 17) Az osztályban nyolc tanuló (András, Balázs, Cili, Dani, Eszter, Feri, Gabi és Hedvig) jó barátságban van egymással. A nyári szünet első napján András kitalálta, hogy másnap együtt elutazhatnak a nyaralójukba, és ott tölthetnének néhány napot. Ezért felhívta telefonon Cilit és Ferit, és megkérte őket, hogy a többieket sürgősen értesítsék telefonon az utazás tervéről. (Egy hívás alkalmával mindig csak ketten beszélgetnek egymással.)

a) Legalább hány telefonbeszélgetésnek kellett megtörténnie (beleértve András beszélgetéseit is), hogy mindenki tudjon a tervezett nyaralásról?

b) A létrejött telefonbeszélgetések során végül mindenki értesült András tervéről. Ezekről a telefonbeszélgetésekről a következőket tudjuk:

- András csak Cilit és Ferit hívta fel;
- Feri senki mással nem beszélt telefonon, Cili pedig csak Andrással és Danival beszélt;
- Dani összesen két barátjával beszélt, Eszter pedig hárommal;
- Balázssal csak Hedvig beszélt, mivel Hedvig tudta, hogy másnak már nem kell szólania;
- András egyedül csak Gabi hívta fel, hogy megkérdezze a nyaraló pontos címét.



Ábrázolja a telefonbeszélgetéseket egy olyan gráfban, amelyben a pontok az embereket jelölik, és két pontot pontosan akkor köt össze él, ha az illetők beszéltek egymással telefonon (függetlenül attól, hogy ki kezdeményezte a hívást)! Használja a mellékelt ábrát!

- 18) K és Z ügynök a MIB-től (Minden Idegen Barátunk!) egy verőfényes nyári napon kihallgatott hét idegent: A, B, C, D, E, F, G-t, mert gyanúsán viselkedtek. Az idegenek a kihallgatás során a következőket vallották:

A: Ismerem a többi hatot.

B: A többi hatból egyet nem ismerek.

C: Ismerek közülük négyet.

D: Csak hármat ismerek közülük.

E és F: Kettőt ismerek közülük.

G: Csak egyiküket ismerem.

Feltételezve, hogy magát senki sem sorolja saját ismerősei közé és az ismeretség kölcsönös, vajon igazat mondtak az ügynököknek az idegenek?

- 20) Öt fiú, András, Balázs, Csanád, Dénes és Elemér kollégistaként kezdi el a 9. osztályt, és ugyanabba az ötágyas szobába kerülnek. András ismerte mind a négy társát, a többiek viszont mindannyian három embert ismertek a négy szobatárs közül. Dénes nem ismerte Elemért. Rajzoljon egy gráfot, amely az öt diák egymás közötti korábbi ismeretségét szemlélteti!

- 21) Rajzoljon le egy 4 pontú egyszerű gráfot, amelyben a pontok fokszáma rendre 3, 2, 2, 1!

- 22) Az ábrán látható térképvázlat öt falu elhelyezkedését mutatja. Az öt falu között négy olyan út megépítésére van lehetőség, amelyek mindegyike pontosan két falut köt össze. Ezekből két út már elkészült. Rajzolja be a további két út egy lehetséges elhelyezkedését úgy, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthassunk a megépült négy úton!



- 23) Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek!

- 24) Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2.

### FÜGGVÉNYEK GYAKORLÁS

Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!

1.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto \frac{3}{4}x + 2$
2.  $g: \mathbf{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x+2} + 3$
3.  $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad h(x) = -|x| - 1$
4.  $i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad y = 2 \cdot |x - 5| - 6$
5.  $j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad j(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 4$
6.  $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad k(x) = -(x + 2)^2 - 3$
7.  $l: [2; +\infty[ \rightarrow \mathbf{R} \quad y = 3 \cdot \sqrt{x - 2} + 1$
8.  $m: [-4; +\infty[ \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto -\sqrt{x + 4} + 2$
9.  $n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad y = \sqrt{|x|}$
10.  $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto 2x^2 - 8$